SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Davide Guidetti

PROBLEMI MISTI DI CAUCHY-DIRICHLET PARABOLICI IN ANGOLI

13 maggio 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Sommario Si danno alcuni risultati nuovi di regolaritá massimale per il problema di Cauchy-Dirichlet parabolico, con dati in opportuni spazi di funzioni hölderiane.

Summary We give some new results of maximal regularity concerning the mixed Cauchy-Dirichlet parabolic problem in an angle, with suitably hölder continuous data.

Scopo di questo seminario é illustrare qualche risultato che sembra nuovo sulla regolaritá delle soluzioni del classico problema di Cauchy-Dirichlet parabolico

$$\begin{cases} \partial_t u(t,z) = \Delta u(t,z) + f(t,z), (t,z) \in [0,T] \times \overline{\Omega}, \\ u(t,z) = g(t,z), (t,z) \in [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,z) = u_0(z), z \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

nel caso in cui Ω sia l'angolo $\{z \in \mathbf{C} | z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0, \theta \in]0, \omega[\}$, con $\omega \in]0, 2\pi[$. Problemi del tipo di (1) sono stati studiati recentemente in spazi di Sobolev con peso (vedi [1]). Risultati in spazi L^p si trovano, tra l'altro, in [2] e [3]. Noi utilizzeremo invece spazi di funzioni hölderiane.

Per lo studio del problema parabolico (1) é essenziale una conoscenza dettagliata del problema ellittico dipendente da un parametro

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u = f, \text{ in } \Omega, \\ \gamma u = g, \end{cases} \tag{2}$$

ove abbiamo indicato con γ l'operatore di traccia su $\partial\Omega$.

Nel caso $\omega = \pi$ é ben noto che, se $f \in C^\sigma(\overline{\Omega})$ con $\sigma > 0$, $\sigma \notin \mathbf{N}$, $g \in C^{2+\sigma}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbf{C} -]-\infty, 0]$, il problema (2) possiede un'unica soluzione $u \in C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$. Consideriamo il caso generale e ci chiediamo preliminarmente quale regolaritá possieda una soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } \Omega \cap V, \\ u_{|\partial\Omega \cap V} = g, \end{cases} \tag{3}$$

con V intorno di 0. Cominciamo dal caso piú semplice $f \equiv 0$ e $g \equiv 0$: passando a coordinate polari si trova abbastanza facilmente che la generica soluzione continua su $\overline{\Omega} \cap V$ di (3) con V intorno di 0 ha la forma

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Im(z^{\frac{k\pi}{\omega}}), \tag{4}$$

con $z^{\frac{k\pi}{\omega}}$ definito a partire dalla piú naturale determinazione del logaritmo su Ω. Poiché $A_k = O(R^{-k})$ per $k \to \infty$, per un certo $R > 0$, l'analisi della regolaritá di (4) vicino a 0 é assai semplice, in quanto é possibile derivare termine a termine; la regolaritá degli addendi é la seguente: se $\frac{k\pi}{\omega} \notin \mathbf{N}$, la funzione $z \to Im(z^{\frac{k\pi}{\omega}})$ é di classe $C^{\frac{k\pi}{\omega}}(\overline{\Omega} \cap V)$, con V intorno limitato di 0 (niente di piú), mentre, se $\frac{k\pi}{\omega} \in \mathbf{N}$, tale funzione é di tipo polinomiale e appartiene quidi a $C^\infty(\overline{\Omega} \cap V)$. Possiamo dunque dire che, fissato $\sigma > 0$, le soluzioni di (3) con dati nulli sono rappresentabili localmente nella forma

$$u(z) = v(z) + \sum_{k \in \mathbf{N}, \frac{k\pi}{\omega} \notin \mathbf{N}, \frac{k\pi}{\omega} < 2+\sigma} A_k Im(z^{\frac{k\pi}{\omega}}) \tag{5}$$

con $v \in C^{2+\sigma}(\overline{\Omega} \cap V')$ per ogni intorno V' di 0 a chiusura compatta in V. Osserviamo in particolare che, se ω é un divisore di π, ogni soluzione di (3) con dati nulli é di classe C^∞.

Consideriamo ora i numeri $\frac{k\pi}{\omega}$ che siano naturali; osserviamo subito che puó essere $\frac{k\pi}{\omega} = 1$ solo per $\omega = \pi$ e $k = 1$. Supponiamo allora direttamente $\frac{k\pi}{\omega} = l \geq 2$. In tal caso, l svolge il seguente ruolo: affinché il problema (3) possieda una soluzione di classe C^l, é necessario che nel punto $(0,0)$ le derivate di ordine $l-2$ di f soddisfino una certa condizione di raccordo con le derivate di ordine l di g. Senza entrare nei dettagli di un enunciato generale, esaminiamo i casi $l = 2$ e $l = 3$. Cominciamo da $l = 2$: questo si puó ottenere per $\omega = \frac{\pi}{2}$ e $k = 1$ e per $\omega = \frac{3\pi}{2}$ e $k = 3$. Poniamo, per $\rho \geq 0$, $g_0(\rho) = g(\rho)$, $g_1(\rho) = g(\rho e^{i\omega})$. E' immediato verificare, che, se (3) possiede una soluzione $u \in C^2(\overline{\Omega} \cap V)$, necessariamente

$$g_0''(0) + g_1''(0) = f(0,0). \tag{6}$$

Consideriamo il caso $l = 3$. Supponiamo che (3) possieda una soluzione $u \in C^3(\overline{\Omega} \cap V)$; necessariamente $f \in C^1(\overline{\Omega} \cap V)$, g_0 e g_1 appartengono a $C^3([0,\delta[)$ per qualche $\delta > 0$ e $g_0(0) = g_1(0)$. Si ha inoltre

$$g_1^{(3)}(0) = \cos^3(\omega)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0,0) + 3\cos^2(\omega)\sin(\omega)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$$

$$+3\cos(\omega)\sin^2(\omega)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(0,0) + \sin^3(\omega)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,0)$$

$$= [\cos^3(\omega) - 3\cos(\omega)\sin^2(\omega)]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0,0) + [3\cos^2(\omega)\sin(\omega) - \sin^3(\omega)]\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$$

$$+3\cos(\omega)\sin^2(\omega)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin^3(\omega)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Se $3\cos^2(\omega)\sin(\omega) - \sin^3(\omega) = 0$, otteniamo allora la condizione di raccordo

$$g_1^{(3)}(0) = \cos^3(\omega)g_0^{(3)}(0) + 3\cos(\omega)\sin^2(\omega)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin^3(\omega)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ció accade precisamente quando $\omega = \frac{k\pi}{3}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$, vale a dire, per qualche $k \in \mathbf{N}$ $\frac{k\pi}{\omega} = 3$.

Consideriamo ora un caso in cui $\omega \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ e la condizione (6) non é soddisfatta: $f \equiv 1$ e $g \equiv 0$. Otteniamo allora su $\overline{\Omega}$ una soluzione della forma

$$u(\rho e^{i\theta}) = \rho^2[Aln(\rho)\sin(2\theta) + \phi(\theta)] \tag{7}$$

con $A \in \mathbf{R}$, $\phi \in C^\infty([0,\omega])$, $\phi(0) = \phi(\omega) = 0$, che per ogni V intorno limitato in $\mathbf{C}$ e per ogni $\epsilon > 0$ é di classe $C^{2-\epsilon}$, ma non di classe C^2, su $\overline{\Omega} \cap V$. Piú in generale, se per qualche $l \in \mathbf{N}$, $l \geq 2$ e per qualche $k \in \mathbf{N}$ $\frac{k\pi}{\omega} = l$, il problema (3) con $f(\rho e^{i\theta}) = \rho^{l-2}\cos((l-2)\theta)$, $g \equiv 0$ possiede su Ω una soluzione della forma

$$u(\rho e^{i\theta}) = \rho^l[A_{\omega,k} ln\rho \sin(l\theta) + \phi_{\omega,k}(\theta)] \tag{8}$$

con $A_{\omega,k} \in \mathbf{R}$, $\phi_{\omega,k} \in C^\infty([0,\omega])$, $\phi_{\omega,k}(0) = \phi_{\omega,k}(\omega) = 0$. Si osservi che a una f di classe C^∞ corrisponde una soluzione che per ogni V intorno limitato in $\mathbf{C}$ e per ogni $\epsilon > 0$ é di classe $C^{l-\epsilon}$, ma non di classe C^l, su $\overline{\Omega} \cap V$.

Fissiamo ora $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ che valga identicamente 1 su un intorno di $(0,0)$. Per $\omega \in]0,2\pi[-\{\pi\}$ e $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$S_{\omega,k}(\rho e^{i\theta}) = \begin{cases} Im\{(\rho e^{i\theta})^{\frac{k\pi}{\omega}}\}\chi(\rho e^{i\theta}) = \rho^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin(\frac{k\pi\theta}{\omega})\chi(\rho e^{i\theta}) \text{ if } \frac{k\pi}{\omega} \notin \mathbf{N}, \\ \rho^{\frac{k\pi}{\omega}}[A_{\omega,k} ln\rho \sin(l\theta) + \phi_{\omega,k}(\theta)]\chi(\rho e^{i\theta}) \text{ if } \frac{k\pi}{\omega} \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{9}$$

Sia, per $\sigma \geq 0$,

$$C_\omega^\sigma(\overline{\Omega}) = \begin{cases} C^\sigma(\overline{\Omega}) \bigoplus V(\{S_{\omega,k} | \frac{k\pi}{\omega} < \sigma\}) \text{ if } \sigma \notin \mathbf{N}, \\ C^\sigma(\overline{\Omega}) \bigoplus V(\{S_{\omega,k} | \frac{k\pi}{\omega} \leq \sigma\}) \text{ if } \sigma \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{10}$$

Nella definizione di $C^\sigma(\overline{\Omega})$ supporremo sempre che tutte le derivate coinvolte siano uniformemente continue e limitate su $\overline{\Omega}$, mentre $V(\{S_{\omega,k} | \frac{k\pi}{\omega} < \sigma\})$ indica lo spazio vettoriale generato da $\{S_{\omega,k} | \frac{k\pi}{\omega} < \sigma\}$.

Fatte queste premesse, torniamo al problema (2); vale il seguente risultato, ove indichiamo con $C^{2+\sigma}(\partial\Omega)$ $\{g \in C(\partial\Omega) | \rho \to g(\rho)$ e $\rho \to g(\rho e^{i\omega}) \in C^{2+\sigma}([0,+\infty[)\}$:

Teorema 1. *Siano $\omega \in]0,2\pi[$, $\omega \neq \pi$, $0 < \sigma < \frac{\pi}{\omega}$, $\sigma \notin \mathbf{N}$, $\frac{(2+\sigma)\omega}{\pi} \notin \mathbf{N}$; allora, per ogni $\lambda \in \mathbf{C}-]-\infty,0]$, $f \in C^\sigma(\overline{\Omega}), g \in C^{2+\sigma}(\partial\Omega)$ il problema (2) possiede un'unica soluzione $u \in C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$. Inoltre, se $\sigma < 2$, per ogni $\theta_0 \in [0,\pi[$, esiste $C(\theta_0) > 0$ tale che, se $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ con $|\theta| \leq \theta_0$, e $|\lambda| \geq 1$,*

$$\begin{aligned} &|\lambda| ||u||_{C^\sigma(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\sigma}{2}} ||\Delta u||_{C(\overline{\Omega})} + ||u||_{C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega})} \\ &\leq C(\theta_0)[||f||_{C^\sigma(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\sigma}{2}} ||\gamma f||_{C(\partial\Omega)} + ||g||_{C^{2+\sigma}(\partial\Omega)} + |\lambda|^{\frac{2+\sigma}{2}} ||g||_{C(\partial\Omega)}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Nel caso $\omega = \pi$ il teorema 1 é naturalmente valido senza la limitazione $\sigma < \frac{\pi}{\omega}$ per quanto riguarda il primo enunciato, con $C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$ al posto di $C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$.

Il teorema 1 fa sorgere la spontanea congettura che alcuni risultati di regolaritá massimale per problemi misti parabolici validi per domini con frontiera regolare in cui intervengono spazi di funzioni hölderiane continuino a essere validi per angoli, con $C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$ che svolga il ruolo di $C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$. Vogliamo presentare due risultati in questo senso. Come é consuetudine, confonderó funzioni scalari di dominio $[0,T]\times\overline{\Omega}$ con funzioni di dominio $[0,T]$ a valori in spazi funzionali su $\overline{\Omega}$.

Sia, al solito, $\omega \in]0,2\pi[$, $\omega \neq \pi$. Cerchiamo condizioni necessarie e sufficienti sui dati f, g e u_0 affinché il problema 1 possieda una soluzione stretta u che sia limitata a valori in $C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$ con $\partial_t u$ limitata a valori $C^\sigma(\overline{\Omega})$ per un certo $\sigma \in]0,2[$, $\sigma \neq 1$. Per soluzione stretta intendiamo una soluzione u di (1) appartenente a $C^1([0,T];C(\overline{\Omega})) \cap C([0,T];C_\omega^2(\overline{\Omega}))$. Le seguenti condizioni sono evidentemente necessarie (nel seguito indicheremo con $B([0,T];E)$ la classe delle funzioni limitate su $[0,T]$ a valori nello spazio di Banach E):

$(I) f \in C([0,T];C(\overline{\Omega})) \cap B([0,T];C^\sigma(\overline{\Omega}))$;

$(II) g \in C^1([0,T];C(\partial\Omega)) \cap C([0,T];C^2(\partial\Omega)) \cap B([0,T];C^{2+\sigma}(\partial\Omega))$,

$\partial_t g \in B([0,T];C^\sigma(\partial\Omega))$;

$(III) u_0 \in C_\omega^{2+\sigma}(\overline{\Omega}), \gamma u_0 = g(0)$;

$(IV) \partial_t g(0) = \gamma(\Delta u_0 + f(0))$;

C' é anche un'ulteriore condizione necessaria, piú riposta: se u ha le proprietá richieste, é anche lipschitziana a valori in $C^{\sigma}(\overline{\Omega})$. Dalla disuguaglianza interpolatoria

$$||v||_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C||v||^{\frac{\sigma}{2}}_{C^{\sigma}(\overline{\Omega})}||v||^{1-\frac{\sigma}{2}}_{C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})} \tag{12}$$

valida per ogni $v \in C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$ con $C > 0$ indipendente da v si ricava che, nel caso particolare che u sia anche limitata a valori in $C^{2+\sigma}(\overline{\Omega})$, $u \in C^{\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C^2(\overline{\Omega}))$; ovviamente ció non é necessariamente vero nel nostro caso, ma si puó dimostrare che é ancora vera la seguente conseguenza del risultato precedente: che $\Delta u \in C^{\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega}))$; tenuto allora conto del fatto che $\gamma(\Delta u) = \partial_t g - \gamma f$, otteniamo la seguente ulteriore condizione

$$(V) : \partial_t g - \gamma f \in C^{\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\partial\Omega)).$$

Si ha, viceversa, il seguente risultato (vedi [4] e [5] per il caso con frontiera regolare):

Teorema 2. *Sia $\sigma \in]0, \min\{2, \frac{\pi}{\omega}\}[, \sigma \neq 1$ tale che $\frac{(2+\sigma)\omega}{\pi} \notin \mathbf{N}$; allora, se le condizioni (I)-(V) sono soddisfatte, il problema (1) ha un'unica soluzione stretta u; inoltre u appartiene a $B([0,T]; C^{2+\sigma}_{\omega}(\overline{\Omega}))$ e $\partial_t u \in B([0,T]; C^{\sigma}(\overline{\Omega}))$.*

Concludiamo presentando una generalizzazione a un angolo di un risultato classico (vedi [6]) che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione stretta di (1) in spazi indicati classicamente con la notazione $C^{1+\frac{\sigma}{2},2+\sigma}$ (Q), con $Q := [0,T] \times \overline{\Omega}$. Si puó verificare che nel caso $\sigma \in]0,2[-\{1\}$ tale spazio é identificabile con $\{u \in C^{1+\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega})) \cap B(([0,T]; C^{2+\sigma}$ $(\overline{\Omega}))|\partial_t u \in B([0,T]; C^{\sigma}(\overline{\Omega}))\}$ (vedi [7]). Dunque la naturale generalizzazione di $C^{1+\frac{\sigma}{2},2+\sigma}(Q)$ é

$$C^{1+\frac{\sigma}{2},2+\sigma}_{\omega}(Q) := \{u \in C^{1+\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega})) \cap B(([0,T]; C^{2+\sigma}_{\omega}(\overline{\Omega}))|$$
$$\partial_t u \in B([0,T]; C^{\sigma}(\overline{\Omega}))\}.$$

Si vede subito che, per avere una soluzione stretta in $C^{1+\frac{\sigma}{2},2+\sigma}_{\omega}(Q)$ le seguenti condizioni sono necessarie:

$(VI) f \in C^{\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega})) \cap B([0,T]; C^{\sigma}(\overline{\Omega}))$;

$(VII) g \in C^{1+\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\partial\Omega)) \cap B(([0,T]; C^{2+\sigma}(\partial\Omega)), \partial_t g \in B([0,T]; C^{\sigma}(\partial\Omega))\}$;

(III) e (IV);

Si potrebbe dimostrare, viceversa, che

Teorema 3. *Sia $\sigma \in]0, \min\{2, \frac{\pi}{\omega}\}[, \sigma \neq 1$ tale che $\frac{(2+\sigma)\omega}{\pi} \notin \mathbf{N}$; allora, se le condizioni (III), (IV), (VI) e (VII) sono soddisfatte, il problema (1) ha un'unica soluzione stretta u; inoltre u appartiene a $C^{1+\frac{\sigma}{2},2+\sigma}_{\omega}(Q)$.*

Diamo un cenno della dimostrazione del teorema 1 nel caso particolare $g \equiv 0$. Osserviamo innanzi tutto che le ipotesi (III), (IV), (VI), (VII) insieme implicano le ipotesi (I)-(V). Dunque, per il teorema 2, il problema (1) possiede un'unica soluzione stretta u appartenente a $B([0,T]; C^{2+\sigma}_{\omega}(\overline{\Omega}))$ con $\partial_t u \in B([0,T]; C^{\sigma}(\overline{\Omega}))$. Resta da far vedere che $u \in C^{1+\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega}))$. A tale scopo utilizziamo il seguente ben noto risultato, dovuto a E. Sinestrari (vedi [8]):

Teorema 4. *Sia E uno spazio di Banach, A un operatore lineare in E con insieme risolvente $\rho(A)$ contenente $\{\lambda \in \mathbf{C} | |\lambda| \geq R, Re(\lambda) \geq 0\}$ per qualche $R \geq 0$ ed esista $M > 0$ tale che, per λ nell'insieme descritto, $||(\lambda - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(E)} \leq M|\lambda|^{-1}$; si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \in [0,T], \\ u(0) = u_0; \end{cases} \tag{13}$$

allora, se per un certo $\alpha \in]0,1[$, $f \in C^{\alpha}([0,T];E)$, $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 + f(0)$ appartiene allo spazio di interpolazione $(E, D(A))_{\alpha,\infty}$, il problema (13) possiede un'unica soluzione $u \in C^{1+\alpha}([0,T];E) \cap C^{\alpha}([0,T];D(A))$.

Poniamo allora $E := C(\overline{\Omega})$, $D(A) := \{u \in \bigcap_{0<\eta<2} C^{\eta}_{\omega}(\overline{\Omega}) | \Delta u \in C(\overline{\Omega}), \gamma u = 0\}$, per $u \in D(A)$ $Au := \Delta u$. Si puó allora dimostrare che le ipotesi su E e A del teorema 4 sono soddisfatte. Si potrebbe anche dimostrare che in questo caso $(E, D(A))_{\frac{\sigma}{2},\infty} = \{v \in C^{\sigma}_{\omega}(\overline{\Omega}) | \gamma v = 0\}$ e tale spazio coincide con $\{v \in C^{\sigma}(\overline{\Omega}) | \gamma v = 0\}$ perché $\sigma < \frac{\pi}{\omega}$. Dunque per le ipotesi (III), (IV) e (VI), $\Delta u_0 + f(0) \in (E, D(A))_{\frac{\sigma}{2},\infty}$ e l'appartenenza di u a $C^{1+\frac{\sigma}{2}}([0,T]; C(\overline{\Omega}))$ segue dal teorema 4.

Bibliografia

[1] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, "Existence and regularity results for oblique derivative problems for heat equations in an angle", Proc. Royal Soc. Edinburgh 128A, 47-79 (1998).

[2] J. O. Adeyeye, "Generation of analyitc semigroups in $L^p(\Omega)$ by the Laplace operator", Boll. U.M.I., ser. VI, vol. IV-C, n. 1, 113-128 (1985).

[3] J. O. Adeyeye,"Characterisation of real interpolation spaces between the domain of the Laplace operator and $L^p(\Omega)$, Ω polygonal and applications", J. Math. pures et appl., 67, 263-290 (1988).

[4] D. Guidetti, "The parabolic mixed Cauchy-Dirichlet problem in spaces of functions which are hölder continuous with respect to space variables", Rend. Mat. Acc. Lincei, S. 9, vol.7, 161-168 (1996).

[5] D. Guidetti,"Optimal regularity for mixed parabolic problems in spaces which are hölder continuous with respect to space variables", in corso di stampa su Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

[6] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", Transl. Math. Month. 23 (1968).

[7] A. Lunardi, E. Sinestrari, W. von Wahl, "A semigroup approach to the time dependent parabolic initial value problem", Diff. Int. Eq. 5, 1275-1306 (1992).

[8] E. Sinestrari, "On the abstract Cauchy problem in spaces of continuous functions", J. Math. Anal. Appl. 107, 16-66 (1985).